Приложение Г

Варианты заданий для самостоятельного решения

Условия заданий

Задание 1. Выяснить, является ли функция ρ расстоянием на множестве X, варианты 1–8. Пусть ρ— метрика на множестве X. Доказать,что d — также метрика на X, варианты 9–10. Проверить, является ли заданная функция нормой, варианты 11–15. Доказать, что определенная на R метрика d не порождается никакой нормой, варианты 16–17. Найти расстояние между функциями в заданном пространстве, варианты 18–22. Найти норму функции, варианты 23–25.

Задание 2. Исследовать на сходимость в пространстве X последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, варианты 1–20. Принадлежит ли некоторому пространству l_p последовательность, варианты 21–22. В метрическом пространстве (R^2, d) изобразить шары $\bar{B}((0;0), 1)$, варианты 23–25.

Задание 3. При каких $\lambda \in R$ применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[a;b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$ к данным интегральным уравнениям? При заданных λ найти это решение методом последовательных приближений.

Задание 4. Рассмотрим уравнение $f(t) = 0$, где $t \in R$. 1) доказать, что это уравнение имеет единственное действительное решение и найти отрезок, которому принадлежит это решение; 2) привести уравнение к виду, удобному для итераций и определить число итераций, необходимых для того, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на ε, если начальное приближение взять $t_0 = 0$; 3) составить и реализовать на компьютере программу для нахождения приближенного решения, выводя на печать результат каждой итерации; $f(t) = ate^t - 1$, $\varepsilon = 0.01$, варианты 1–15; $f(t) = t^5 + t + 1 = 0$, варианты 16–25.

Задание 5. Исследовать решение интегрального уравнения с вырожденным ядром, при различных значениях параметра λ.

Задание 6. Исследовать множество M на компактность в пространстве $C[0, 1]$.

Задание 7. Пусть $A, B \subset X$ — выпуклые множества. Проверить множество C на выпуклость, варианты 1–3; будет ли выпуклым в пространстве $C[0, 1]$ множество, варианты 7–11. Образуют ли в пространстве подпространство следующие множества функций 12–25.

Задание 8. Доказать, что множество M — подпространство в l_2 и найти его ортогональное дополнение 1–3. Ортогонализировать в $\tilde{L}_2[0, 1]$ со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ полиномы, варианты 6–11. Найти ортогональное дополнение множества M в гильбертовом пространстве H, варианты 12–14. Найти ортогональную проекцию вектора x в гильбертовом пространстве H на подпространство образованное векторами a_1, a_2 и a_3 варианты 17–25.

Вариант 1

1. $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$, $x, y \in S$, $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$;

   Аксиома треугольника следует из того, что $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ монотонно возрастает на $[0; +\infty)$;

2. $X = C[0; 1]$, $\quad x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t f(t)\, dt + x$, $\qquad \lambda = \frac{1}{2}$;
4. $a = 1$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt^2 + t) f(t) dt + 1$;
6. $M = \{\sin \alpha t, \alpha \in R\}$;
7. $C = A \cup B$;
8. $M = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 0\right\}$, $m \in N$, m — фиксировано;
9. $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;

Вариант 2

1. $\rho(m, n) = \dfrac{|m - n|}{mn}$; $m, n \in N$;
2. $X = C[0; 1]$, $\quad x_n(t) = t^n$;
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x t^2 f(t)\, dt + 1$, $\qquad \lambda = \frac{1}{2}$;
4. $a = 2$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + xt) f(t) dt$;
6. $M = \{\sin \alpha t, \alpha \in [2, 3]\}$;
7. $C = A \cup B$;
8. $M = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k}}{k} = 0\right\}$;
9. $A\colon C[-1, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t)$;

Вариант 3

1. $\rho(x, y) = |arctgx - arctgy|; x, y \in R^1;$

2. $X = C[0; 1], \quad x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}};$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^m t^n f(t)\, dt + x, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$

4. $a = 3;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (x + t) f(t) dt + x;$

6. $M = \{\operatorname{arctg} \alpha t, \alpha \in [-1; 1]\};$

7. $C = A + B;$

8. $M = \left\{ x(t) \in L_2[-1, 1] : \int\limits_{-1}^1 |t| x(t) dt = 0 \right\};$

9. $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = t^2 x(0);$

Вариант 4

1. $\rho(x, y) = arctg|x - y|; x, y \in R^1;$

2. $X = C[0; 1], \quad x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}};$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 e^{x-t} f(t)\, dt + 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$

4. $a = 4;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt + x) f(t) dt;$

6. $M = \{t^n, n \in N\};$

7. $C = A \setminus B;$

8. $M = \left\{ x(t) \in L_2[0, 1] : \int\limits_0^1 x(t) dt = 0 \right\};$

9. $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1],\ Ax(t) = x(t^2);$

Вариант 5

1. $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|; x, y \in R^1;$

2. $X = C[0; 1], \quad x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n};$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t^2 f(t)\, dt + x^3, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$

4. $a = 5;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (t^2 + xt) f(t) dt + 1;$

6. $M = \{e^{t-\alpha}, \alpha \in R, \alpha \geqslant 0\};$

7. $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$

8. В пространстве l_2 найти ортогональную проекцию вектора $l(1, 0, 0, \ldots)$ на подпространство $L = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 0\right\};$

9. $A\colon C^1[a, b] \to C[a, b],\ Ax(t) = x(t);$

Вариант 6

1. $\rho(x, y) = |e^x - e^y|; x, y \in R^1;$

2. $X = C[0; 1], \quad x_n(t) = \frac{t}{n} \ln \frac{t}{n};$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 e^{x-2t} f(t)\, dt + 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$

4. $a = 6;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (x^2 t + 1) f(t) dt;$

6. $M = \{\sin(t + n), n \in N\};$

7. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество и λ — число; Будет ли выпуклым множество

$$\lambda A = \{x \in X : x = \lambda y, y \in A\}?$$

8. $1,\ t,\ t^2;$

9. $A\colon C^1[a, b] \to C[a, b],\ Ax(t) = \frac{dx}{dt};$

Вариант 7

1. $\rho(m,n) = \begin{cases} 0, m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, m \neq n \end{cases}; m,n \in N;$
2. $X = C[0;1], \quad x_n(t) = n^3 t(1+n^4 t)^{-1};$
3. $f(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgt\, f(t)\, dt + 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$
4. $a = 7;$
5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x-t) f(t) dt + x;$
6. $M = \left\{\sin n\sqrt{t}, n \in N\right\};$
7. Многочленов степени $= k$;
8. 2, $\sin t$, t^2;
9. $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau) d\tau;$

Вариант 8

1. $\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|$, $X = C^1[0;1]$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций;
2. $X = C[0;1], \quad x_n(t) = nt^2(1+nt)^{-1};$
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t\, f(t)\, dt + \sin x, \qquad \lambda = 1;$
4. $a = 8;$
5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (1-2xt) f(t) dt;$
6. $M = \{x(t) \in C[0,1] : |x(t)| \leqslant \varphi(t), \varphi(t) \in C[0,1], \varphi(t) \geqslant 0\};$
7. Многочленов степени $\leqslant k$;
8. 1, $\cos t$, t;
9. $A_\lambda\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $A_\lambda x(t) = \begin{cases} x(t), & t \leqslant \lambda, \lambda \in (0,1) \\ 0, & t > \lambda, \lambda \in (0,1) \end{cases};$

Вариант 9

1. $d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$

2. $X = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots 0, 1}_{n}, 0, \ldots\right)$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin x \cos t\, f(t)\, dt + \sin x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $a = 9$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (tx + x^2) f(t) dt - x$;

6. $M = \{x(t) \in C[0, 1] : x(0) = a, |x'(t)| \leqslant A\}$;

7. Непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)| dt \leqslant 1;$$

8. e^t, t, t^2;

9. $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;

Вариант 10

1. $d(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$

2. $X = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^3 t^2 f(t)\, dt + x^2, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $a = 10$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x^2 t^2 - tx) f(t) dt$;

6. $M = \left\{x(t) \in C^1[0, 1] : |x(t)| \leqslant 2, |x'(t)| \leqslant 3\right\}$;

7. Непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant 1;$$

8. 1, e^t, t^2;

9. $A\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = x(t)$;

Вариант 11

1. $||x|| = \max_{0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}} |x(t)|;\ x \in C[0,1];$

2. $X = l_1,\ x_n = \left(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{n}, 0, \ldots\right);$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt^3 f(t)\,dt + \frac{1}{3}x, \qquad \lambda = \frac{1}{3};$

4. $a = 11;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + xt) f(t) dt;$

6. $M = \left\{ y(t) \in C[a,b] : y(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds, |x(s)| \leqslant A \right\},$
   где $K(t,s) \in C[a,b] \times C[a,b];$

7. Непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию
$$\max|x(t)| + \max|x'(t)| \leqslant 1;$$

8. $\sin t,\ t,\ t^2;$

9. $A\colon H^1[0,1] \to H^1[0,1],\ Ax(t) = tx(t);$

Вариант 12

1. $||x|| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|,\ x \in C^1[0;1];$

2. $X = l_2,\ x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right);$

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2t^2 f(t)\,dt + \frac{2}{3}x, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$

4. $a = 12;$

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x + t) f(t) dt + x;$

6. $M = \left\{ y(t) \in C[a,b] : y(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds, |x(s)| \leqslant A \right\},$
   где $K(t,s) \in C[a,b] \times C[a,b];$

7. Монотонные функции;

8. $H = L_2,\ M = \{x = (x_1, x_2, ;;) \in L_2 : x_2 = x_4 = \ldots = 0\};$

9. $A\colon H^1[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(t) = tx(t);$

Вариант 13

1. $||x|| = |x(1) - x(0)| + \max_{0<t<1} |x'(t)|; x \in C^1[0;1]$;

2. $x_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$,

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^4 t f(t)\, dt + \frac{x^2}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $a = 13$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt + x) f(t) dt$;

6. $M = \left\{x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} e^{-nt}, |a_n| < 1, \forall n \in N\right\}$;

7. Четные функции;

8. $H = L_2[a,b]$, $M = \{x \in H : x(t) \equiv 0$, на $[c,d] \subset [a,b]\}$;

9. $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$, $x \in C[-1,1]$;

Вариант 14

1. $||x|| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$

2. $x_n(t) = n\left(t^{1/n} - 1\right), \quad C[a;b]$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t f(t)\, dt + \frac{1}{4}x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $a = 14$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (t^2 + xt) f(t) dt + 1$;

6. $M = \left\{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x+n^2}, |a_n| < 1\right\}$;

7. Многочлены;

8. $H = L_2[0,1]$, $M = \left\{x \in H : \int\limits_0^1 x(t)dt = 0\right\}$;

9. $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$, $x \in C^1[-1,1]$;

Вариант 15

1. $||x|| = \max_k |x_k|, x = (x_1, x_2, \dots) \in C_0$— пространство сходящихся к 0 последовательностей;
2. $x_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & t \in [0; 1/n]; \\ n^2\left(\frac{2}{n} - t\right), & t \in (1/n; 2/n); \\ 0, & t \in (2/n; \infty); \end{cases}$
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 e^{2x} e^{-t} f(t)\, dt + 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$
4. $a = 15;$
5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 t + 1) f(t) dt;$
6. $M = \left\{(f'(x))^2 + f^2(x) < 1, \forall x \in [0; 1]\right\},$
7. Многочлены степени $\leqslant k$;
8. В гильбертовом пространстве $H = C^m$ найти ортогональную проекцию вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ на подпространство $G = \{g = (g_1, \dots, g_m) \in H : g_m = 0\}$;
9. $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$;

Вариант 16

1. $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|};$

   ⓘ Метрика d порождается нормой тогда и только тогда, когда

   a) $\forall \alpha \in \varphi, \forall x \in X : d(0, \alpha x) = |\alpha| d(0, x);$
   b) $\forall x, y, z \in X : d(x + z, y + z) = d(x, y);$

2. $X = C[0; 1], \quad x_n(t) = \frac{t}{n} \ln \frac{t}{n};$
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin t\, dt + \cos x, \qquad \lambda = \frac{1}{2};$
4. $\varepsilon = 0.01;$
5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x - t) f(t) dt + x;$
6. $M = \left\{f(x) \in C^n_{[a,b]}, \left|f^{(n)}(x) < K\right|\right\};$
7. Непрерывно дифференцируемые функции;
8. В гильбертовом пространстве $H = l_2$ найти ортогональную проекцию вектора $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ на подпространство $G = \{g = (g_1, g_2, \dots) \in l_2 : g_1 = g_3 = \dots = 0\}$;
9. $f(x) = \int_{-1}^{1} t x(t) dt$, $x \in L_2[-1, 1]$;

Вариант 17

1. $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

(!) Метрика d порождается нормой тогда и только тогда, когда

a) $\forall \alpha \in \varphi, \forall x \in X : d(0, \alpha x) = |\alpha| d(0, x)$;
b) $\forall x, y, z \in X : d(x+z, y+z) = d(x, y)$;

2. $x_n(t) = \frac{nt}{1+n+t}$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos x \sin t\, dt + \cos x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $\varepsilon = 0.0001$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1-2xt) f(t) dt$;

6. $M = \{\sin nt, n \in N\}$

7. Непрерывные кусочно-линейные функции;;

8. $H = l_2$, $x = (0, 1, 3, 5, 7, 0, \ldots)$, $a_1 = (1, 1, 2, 0, \ldots)$,
$a_2 = (1, i, 0, \ldots)$, $a_3 = (0, 1, -1, 0, \ldots)$;

9. $f(x) = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

Вариант 18

1. $x(t) = 2t^3 - 4t + 3$, $g(t) = 5t^2 + 8t - 1$, $x(t), g(t) \in C[0;2]$;

2. $x_n(t) = \sin \frac{t}{n}$, $C \in (-\infty; +\infty)$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 e^{x+t} f(t) dt + 1, \qquad \lambda = \frac{1}{3}$;

4. $\varepsilon = 0.05$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (tx + x^2) f(t) dt - x$;

6. $M = \left\{ x(t) \in C[0,1], |x(0)| \leqslant K_1, \int\limits_0^1 |x'(t)|^2 \leqslant K_2, \right\}$;

7. Непрерывные функции с ограниченной вариацией;

8. $H = l_2$, $x = (1, 2, 0, 0, 3, 0, \ldots)$, $a_1 = (1, i, 0, \ldots)$,
$a_2 = (1, 2, 2, 0, \ldots)$, $a_3 = (-1, 2, 1, 0, \ldots)$;

9. $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;

Вариант 19

1. $g(t) = 2 + 3t^2$, $s(t) = 4t^2 - 7$, $g(t), s(t) \in C^2[0; 1]$;

2. $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$, $C \in (-\infty; +\infty)$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t^3 f(t)\, dt + \frac{1}{5}x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $\varepsilon = 0.1$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x^2t^2 - tx) f(t) dt$;

6. $M = \{x(t) \in C^1[0, 1], |x'(t)| \leqslant 1, x(0) = a\}$;

7. Функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;

8. $H = L_2[0, 1]$, $x(t) = e^t$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;

9. $Ax(t) = tx(t)$;

Вариант 20

1. $f(t) = \frac{t}{t^2+2t-1}$, $g(t) = 1$, $f(t), g(t) \in C^1[0; 1]$;

2. $x_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, $C \in (-\infty; +\infty)$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt^2 f(t)\, dt + \frac{2}{3}x, \qquad \lambda = \frac{2}{3}$;

4. $\varepsilon = 0.05$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt^2 + t) f(t) dt + 1$;

6. $M = \{x(t) \in C^1[0, 1], |x'(t)| \leqslant 1,$ и $\forall x(t) \exists t_x \in [0, 1] : x(t_x) = 0\}$;

7. Функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$;

8. $H = L_2[0, 1]$, $x(t) = \sin t$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = e^t$;

9. $Ax(t) = \int_0^1 tx(\tau) d\tau$;

Вариант 21

1. $x(t) = \sin t,\ y(t) = \frac{t}{2},\ x(t), y(t) \in C[0; \pi]$;
2. $\bar{x} = \left\{ \dfrac{1}{\ln(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$;
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt f(t)\,dt + x, \qquad \lambda = \frac{1}{3}$;
4. $\varepsilon = 0.001$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (xt^2 - x^2 t) f(t) dt$;
6. $M = \left\{ \dfrac{nt}{1 + n^2 t^2}, n \in N \right\}$;
7. Функции, удовлетворяющие условию Липшица, с какой-нибудь постоянной, зависящей от функции;
8. $H = l_2,\ x = (-1, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots),\ a_1 = (1, i, 2, 0, \ldots)$,
   $a_2 = (-1, -i, 0, \ldots),\ a_3 = (1, 1, -1, 0, \ldots)$;
9. $Ax(t) = \int_0^1 \tau x(\tau) d\tau$;

Вариант 22

1. $g(t) = 2 + 3t^2,\ f(t) = 4t^2 - 7,\ C^2[0; 1]$;
2. $\bar{x} = \left\{ \dfrac{1}{n \cdot \ln(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$;
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t^2 f(t) dt + \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}$;
4. $\varepsilon = 0.005$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (xt^2 - t) f(t) dt$;
6. $M = \left\{ \dfrac{1}{1 + nt^2}, n \in N \right\}$;
7. Ограниченные функции;
8. $H = l_2,\ x = (i, i, -1, 2, 0, 0, \ldots),\ a_1 = (-1, 1, -2, 0, \ldots)$,
   $a_2 = (1, 5, 0, \ldots),\ a_3 = (i, 1, -1, 0, \ldots)$;
9. $Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;

Вариант 23

1. $x(t) = \frac{t+6}{t^2+13}$, $C[-5;5]$;
2. $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$;
3. Непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию
$$\max|x(t)| + \max|x'(t)| \leqslant 1;$$
4. $\varepsilon = 0.003$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xt - xt^2) f(t) dt + 1$;
6. M — множество многочленов степени n, ограниченное в $C[0,1]$;
7. Непрерывных функций, удовлетворяющих условию
$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant 1;$$
8. $H = l_2$, $x = (2, -1, i, 0, i, 0, \ldots)$, $a_1 = (1, -1, 2, 0, \ldots)$, $a_2 = (1, i, 0, \ldots)$, $a_3 = (i, 1, 1, 0, \ldots)$;
9. $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$;

Вариант 24

1. $x(t) = 2t^2 - 4t + 1$, $C[0;2]$;
2. $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + 4|x_2 - y_2|^2}$;
3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 x^2 t f(t)\, dt + \frac{1}{4}x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;
4. $\varepsilon = 0.3$;
5. $f(x) = \lambda \int\limits_0^1 (t - xt^2) f(t) dt$;
6. M — множество многочленов степени $\leqslant n$, ограниченное в $C[0,1]$;
7. $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
8. $H = L_2[0,1]$, $x(t) = t^2$, $a_1(t) = t$, $a_2(t) = e^{-t}$, $a_3(t) = 1$;
9. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

Вариант 25

1. $x(t) = \frac{1}{2}t - \sin t,\ C[0;\pi]$;

2. $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\}$;

3. $f(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \cos x \sin t\, dt + \cos x, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$;

4. $\varepsilon = 0.002$;

5. $f(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xt^2 + t^3) f(t) dt$;

6. $M = \{e^{t-\alpha}, \alpha \in [0, 2]\}$;

7. Функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;

8. $H = L_2[0, 1]$, $x(t) = \sin t$, $a_1(t) = t^2 - t$, $a_2(t) = 2$, $a_3(t) = t^3$;

9. $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$;